PART2　つねに成り立つ不等式

2　すべての実数 x に対して，不等式 $(a^2-1)x^2+(a-1)x+1>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

すべての実数 x に対して，不等式 $f(x)>0$ が成り立つのは，$y=f(x)$ のグラフがつねに x 軸より上側にあるときである。とくに，$f(x)$ が２次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ のときは，$a>0$ かつ $f(x)=0$ の判別式 $D<0$ のときである。

第６講　PART2　確認問題

1　すべての実数 x に対して，不等式

$$(a^2-4)x^2-(a-2)x+2 \geqq 0$$

が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

ア

①　$a<-2,\ 2<a$　　②　$a<-2,\ 2\leqq a$

③　$-2<a<2$　　④　$-2<a\leqq 2$

⑤　$-\dfrac{18}{7}\leqq a<2$　　⑥　$-\dfrac{18}{7}\leqq a\leqq 2$

⑦　$a\leqq -\dfrac{18}{7},\ 2<a$　　⑧　$a\leqq -\dfrac{18}{7},\ 2\leqq a$

PART2　つねに成り立つ不等式

2　すべての実数 x に対して，不等式 $(a^2-1)x^2+(a-1)x+1>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=(a^2-1)x^2+(a-1)x+1$ とおくと

$f(x)=(a+1)(a-1)x^2+(a-1)x+1$

(i)　$a=1$ のとき

$f(x)=1$ となり，すべての実数 x に対して $f(x)>0$ が成り立つ。

(ii)　$a=-1$ のとき

$f(x)=-2x+1$ となり，$x\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき $f(x)\leqq 0$ となる。よって不適。

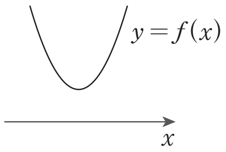
(iii)　$a\neq\pm1$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは放物線である。

よって，2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，すべての実数 x に対して，$f(x)>0$ が成り立つための条件は

$a^2-1>0$ ……①　かつ　$D<0$ ……②

である。



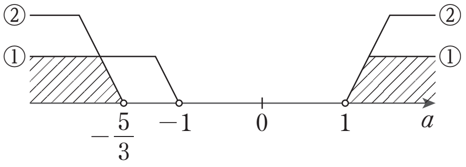
①より　$(a+1)(a-1)>0$　　よって　$a<-1,\ 1<a$

②より　$(a-1)^2-4(a^2-1)\cdot1<0$

$(a-1)\{(a-1)-4(a+1)\}<0$

$(a-1)(3a+5)>0$

よって　$a<-\dfrac{5}{3},\ 1<a$



①かつ②より $a<-\dfrac{5}{3},\ 1<a$　($a\neq\pm1$ を満たす)

(i)～(iii)より，求める a の値の範囲は $a<-\dfrac{5}{3},\ 1\leqq a$

第 6 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑧

[解説]

$f(x)=(a^2-4)x^2-(a-2)x+2$ とおくと

$$f(x)=(a-2)(a+2)x^2-(a-2)x+2 \quad \text{[A]}$$

(i)　$a=2$ のとき

$f(x)=2$ となり，すべての実数 x に対して

$f(x)\geqq 0$ が成り立つ。

(ii)　$a=-2$ のとき

$f(x)=4x+2$ となり，$x<-\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(x)<0$ であるから不適。

(iii)　$a\neq\pm2$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは放物線である。

よって，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ が成り立つための条件は

$a^2-4>0$　……(＊)　かつ

$D\leqq 0$　……(＊＊) [A]

である。

(＊)より　$(a+2)(a-2)>0$

よって　$a<-2,\ 2<a$

(＊＊)より　$(a-2)^2-4(a-2)(a+2)\cdot2\leqq 0$

$(a-2)\{(a-2)-8(a+2)\}\leqq 0$

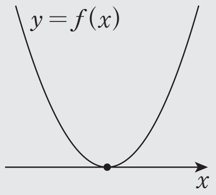
$(a-2)(7a+18)\geqq 0$

よって　$a\leqq-\dfrac{18}{7},\ 2\leqq a$

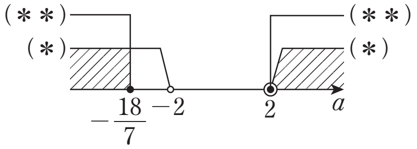
(＊)かつ(＊＊)より　$a\leqq-\dfrac{18}{7},\ 2<a$

（$a\neq\pm2$ を満たす）

[A]　すべての実数 x に対して，不等式 $f(x)\geqq 0$ が成り立つのは，$y=f(x)$ のグラフが，x 軸と共有点をもつ場合も含み，つねに x 軸より上側にあるときである。



とくに，$f(x)$ が 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ のときは，$a>0$ かつ $f(x)=0$ の判別式 $D\leqq 0$ のときである。



(i)～(iii)より，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a \leqq -\frac{18}{7},\ 2 \leqq a}$$